



TITLE:

投入産出構造・緩衝在庫・販売予測—数量調整過程の安定分析—

AUTHOR(S):

森岡, 真史

CITATION:

森岡, 真史. 投入産出構造・緩衝在庫・販売予測—数量調整過程の安定分析—. 経済論叢 1998, 161(1): 108-132

ISSUE DATE:

1998-01

URL:

<https://doi.org/10.14989/45193>

RIGHT:

經濟論叢

第161巻 第1号

野澤正徳教授記念號

献 辞	本 山 美 彦	
G. リューメリンの社会統計論	長 屋 政 勝	1
イギリスの福祉改革とボランティア組織	川 口 清 史	34
ヘーゲル論理学・有論 「質」と「資本」の論理	角 田 修 一	48
インターネット／イントラネットの 経済的・社会的利用の諸形態	小 林 正 人	68
各国通貨単位の資本労働比率変動と マクロ収穫率	大 西 広	93
投入産出構造・緩衝在庫・販売予測	森 岡 真 史	108
外生性の実践的検定手法	井 宮 泰 秀 口 崎 憲 治	133

野澤正徳 教授 略歴・著作目録

平成10年1月

京 都 大 学 經 済 學 會

投入産出構造・緩衝在庫・販売予測

——数量調整過程の安定分析——

森 岡 真 史

はじめに

筆者はこれまで一連の論考（森岡 1991-1992 a, 1992 b, 1993, 1996）で，過去の販売実績の推移に基づき販売量を予測し，品切れや原材料不足を回避するように緩衝在庫部分を含めて生産量および原材料購入量を決定する多数の産業企業間の相互作用からなる短期調整過程モデルの特質とその経済学的含意について検討してきた¹⁾。それらは，投入係数行列の構造，緩衝在庫係数，販売予測方法などによって調整過程の安定性が複雑に影響されることを示している。

本稿ではこれらの論考，特に森岡（1996）への補足として，上述のモデルから導かれる連立差分方程式の固有方程式の解と各パラメータとの関係をより詳しく明らかにする。部門間の相互作用と予測形成（フィードフォワード）を伴う調整過程の安定性の問題は，経済の定常性を支える構造を認識するうえで重要な意味をもっている。本稿における検討はもっぱら技術的な性格のものであるが，少なくとも間接的にはこの問題の理解に寄与するであろう。

1 数量調整過程のモデル

モデルは，以下のような状況および企業行動に関する仮定に基づいている。

1) 本稿では，Metzler (1941)，Lovell (1962)，Foster (1963)，Kornai-Martos (1973)，Kornai (1981)，塩沢 (1983)，Martos (1990)，谷口 (1991) とともに，短期的な需要と供給が在庫を緩衝装置とする企業の適応的行動によって調節されると想定している。

経済は n 個の産業からなり、各産業に 1 つの企業が存在する。各企業は需要制約下にあり²⁾、生産と取引には各 1 期間が必要である。第 j 企業にとって今期 (t 期) 首および来期首の 2 期間を通しての販売可能量は、前期末の製品在庫 $z_j(t-1)$ 、前期首着手・今期首完成の製品 $y_j(t)$ 、今期首着手・来期首完成の製品 $y_j(t+1)$ の和である。 t 期首における 1 期間あたりの販売量の予測を $s_j^e(t)$ とすると、第 j 企業は来期首の販売可能量が、今後 2 期間の販売予測 $2s_j^e(t)$ に緩衝製品在庫部分 $s_j^e(t)k$ を加えた量 $s_j^e(t)(2+k_j)$ に等しくなるように $y_j(t+1)$ を決定する。すなわち、

$$y_j(t+1) = s_j^e(t)(2+k_j) - z_j(t-1) - y_j(t) \quad (1)$$

今期の現実の販売量 $s_j(t)$ は各企業の原材料発注によって決定されるので、この時点ではまだ未知である。第 j 企業にとって来期首に投入可能な原材料は、前期末の原材料在庫 $v_j(t-1) = [v_{j1}(t-1), \dots, v_{jm}(t-1)]$ 、前期首発注・今期首入荷の原材料 $m_j(t-1) = [m_{j1}(t-1), \dots, m_{jm}(t-1)]$ および今期首発注・来期首入荷の原材料 $m_j(t)$ から、(1) で決められた今期の投入量 $y_j(t+1)a_j$ ($a_j = [a_{j1}, \dots, a_{jm}]$ は投入係数ベクトル) を控除したものである。第 j 企業は来期首に着手する製品の今期首時点での予定を、(1) 式を参照して暫定的に $s_j^e(t)$ に設定する (最終的決定は来期首)。したがって第 j 企業は来期首の投入可能量が、予定投入量 $s_j^e(t)a_j$ に緩衝原材料在庫部分 $s_j^e(t)a_j l$ を加えた量 $s_j^e(t)(1+l_j)a_j$ に等しくなるように発注量 $m_j(t)$ を決定する。すなわち、

$$m_j(t) = \{s_j^e(t)(1+l_j) + y_j(t+1)\}a_j - v_j(t-1) - m_j(t-1) \quad (2)$$

消費需要と投資需要は一定であるとし、第 j 企業へのこれらの需要の和を d_j で表す。他の企業も同様に生産量・原材料発注量を決定するとき、 $s_j(t)$ は

$$s_j(t) = \{m_{1j}(t) + \dots + m_{nj}(t)\} + d_j \quad (3)$$

すなわち各企業からの原材料発注と、独立需要の和となる。在庫の増減は、

$$\begin{aligned} z_j(t) &= z_j(t-1) + y_j(t) - s_j(t), \\ v_j(t) &= v_j(t-1) + m_j(t-1) - y_j(t+1)a_j \end{aligned} \quad (4)$$

2) 「需要制約」型市場の特質については、森岡 (1991, pp. 150-153) を参照せよ。

によって示される。各企業の製品及び原材料の緩衝在庫係数の和が同一、すなわち $k_j + l_j = k + l$ ($j=1, \dots, n$) であると仮定し、(1)~(4)を整理すると、

$$s(t) = \{s^e(t) - s^e(t-1)\} (3+k+l)A + s(t-1)A + d \quad (5)$$

を得る。ただし、 $s(t) = [s_1(t), \dots, s_n(t)]$ ($s^e(t)$, d についても同様)、 A は a_j を第 j 行とする投入係数行列。 A は分解不能で生産的 (したがって A のフロベニウス根を λ^+ とすると、 $0 < \lambda^+ < 1$)、また n 個の異なる固有値をもつとする。 $3+k+l$ の部分は、生産と取引に各 1 期間を要し、各企業が製品と原材料の双方について販売予測に比例的な緩衝部分を保有しようとするという仮定を反映している³⁾。仮定の一部を、(a) 原材料が発注後直ちに納品される (Lovell 1962; 塩沢 1983)、(b) 生産期間が 2 期間以上に渡り、企業が各生産工程間の緩衝装置として仕掛品在庫を保有する (森岡 1992 b)、(c) 企業が注文生産を行う (Foster 1963)、などのように変更しても、得られる式は整数値と緩衝係数の部分以外では (5) と同一である。

II 移動平均法による販売予測の場合

各企業が販売予測において τ 期間遡及する移動平均法を採用するとき、

$$s^e(t) = \{s(t-1) + s(t-2) + \dots + s(t-\tau)\} / \tau \quad (6)$$

であり、これを (5) に代入すると、調整過程の安定性は、方程式

$$x^{\tau+1} - (q+1)\lambda_j x^\tau + q\lambda_j = 0 \quad (j=1, \dots, n) \quad (7)$$

の重複を含めて $n(\tau+1)$ 個の根のうちの優根に依存する。ここで、 λ_j は A の第 j 固有値 ($\lambda_1 = \lambda^+$ とする)、 $q = (3+k+l)/\tau$ 、 $\lambda_j = 0$ ならば対応する x はゼロ。この場合を除外し、 $\lambda_j = \mu_j (\cos \theta_j + i \sin \theta_j)$ ($0 < \mu_j \leq \lambda^+$)、 $x = \phi_j (\cos \omega_j + i \sin \omega_j)$ として (7) を書き換えると、添字の j を省略して次の方程式を得る。

$$\phi^{\tau+1} \exp[i\omega(\tau+1)] - \phi^\tau \mu(q+1) \exp[i(\omega\tau + \theta)] + q\mu \exp[i\theta] = 0 \quad (8)$$

3) より正確には、さらに、企業が t 期に原材料発注のために暫定的に立てた生産計画を、 $t+1$ 期の時点で、新たに獲得した情報 (t 期の販売量) に基づいて改訂するということにも基づいている。この改訂を行わない場合には、定数部分は 2 になる (谷口 1991 のモデル)。

(8)を満たす $\tau+1$ 個の ϕ の最大値を Ψ とすると、 Ψ は θ, μ, q, τ の関数である。

1. 投入係数行列固有値の回転の作用

$N=0, 1, \dots, 2\tau-1$ とし、(8)で θ を $2N\pi/\tau-\theta$, ω を $2N\pi/\tau-\omega$ に入れ替えると、

$$\begin{aligned} & \exp[2iN\pi/\tau] \{ \phi^{\tau+1} \exp[-i\omega(\tau+1)] \\ & - \phi^{\tau} \mu(q+1) \exp[-i(\omega\tau+\theta)] + \mu q \exp[-i\theta] \} = 0 \end{aligned}$$

また(8)で θ を $\theta+2\pi/\tau$, ω を $\omega+2\pi/\tau$ に入れ替えると、

$$\begin{aligned} & \exp[2i\pi/\tau] \{ \phi^{\tau+1} \exp[i\omega(\tau+1)] \\ & - \phi^{\tau} \mu(q+1) \exp[i(\omega\tau+\theta)] + \mu q \exp[i\theta] \} = 0 \end{aligned}$$

これらの方程式の解 ϕ は(8)の解 ϕ と一致する。したがって、 $\tau+1$ 個の ϕ は全体として $\theta=N\pi/\tau$ に関して対称であり、 θ に関して $2\pi/\tau$ の周期をもつ。また複素平面上では、 $N\pi/\tau$ に対称な θ の2つの値に対する解は扁角 $N\pi/\tau$ について対称な位置にあり、 $\theta+2\pi/\tau$ に対する解は θ に対する解を $2\pi/\tau$ 回転した位置にある。

命題 1 $\Psi(\theta)$ は $\theta=(2N-2)\pi/\tau$ で最小、 $(2N-2)\pi/\tau < 0 < (2N-1)\pi/\tau$ で単調増加、 $\theta=(2N-1)\pi/\tau$ で最大、 $2(N-1)\pi/\tau < \theta < 2N\pi/\tau$ で単調減少となる。 $(N=1, 2, \dots, \tau)$

(証明) (8)の両辺に $\exp[-i\omega\tau]$ をかけることにより、

$$\begin{aligned} & \phi^{\tau+1} \cos \omega - \phi^{\tau} \mu(q+1) \cos \theta + \mu q \cos(\theta - \omega\tau) = 0, \\ & \phi^{\tau+1} \sin \omega - \phi^{\tau} \mu(q+1) \sin \theta + \mu q \sin(\theta - \omega\tau) = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

を得る。(9)を θ で微分すると

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} (\tau+1) \phi^{\tau} \cos \omega - \phi^{\tau-1} \tau \mu(q+1) \cos \theta & -\phi^{\tau+1} \sin \omega + \tau \mu q \sin(\theta - \omega\tau) \\ (\tau+1) \phi^{\tau} \sin \omega - \phi^{\tau-1} \tau \mu(q+1) \sin \theta & \phi^{\tau+1} \cos \omega - \tau \mu q \cos(\theta - \omega\tau) \end{bmatrix} \\ & \times \begin{bmatrix} d\phi/d\theta \\ d\omega/d\theta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} -\mu(q+1)\phi^{\tau}\sin\theta + \mu q \sin(\theta - \omega\tau) \\ \mu(q+1)\phi^{\tau}\cos\theta - \mu q \cos(\theta - \omega\tau) \end{bmatrix} \quad (10)$$

左辺の行列の行列式を D とすると,

$$D = \phi^{2\tau-1} [\{ (\tau+1)\phi - \mu\tau(q+1) \}^2 + 2\phi\mu\tau(\tau+1)(q+1)(1 - \cos(\theta - \omega))] \geq 0 \quad (11)$$

等号が成立するのは, $\omega = \theta$ かつ $\phi = \mu\tau(q+1)/(\tau+1) = \phi^*$ の場合のみ。これを (8) と (9) に代入すると, $\cos\theta\tau = \pm 1$, 複号に対応して $\phi^{\tau+1} - \phi^{\tau}\mu(q+1) \pm \mu q = \mu[-\mu^{\tau}\tau^{\tau}\{(q+1)/(\tau+1)\}^{\tau+1} \pm q] = 0$ となる。よって $D=0$ となるのは, $\omega = \theta$, $\cos\theta\tau = 1$ かつ $\mu = \mu^* = [(\tau+1)^{\tau+1}q/(q+1)^{\tau+1}\tau^{\tau}]^{1/\tau}$ の場合のみ。それ以外では $D > 0$ となるので, $d\phi/d\theta$, $d\omega/d\theta$ は確かに存在する。なお, $\mu = \mu^*$ のとき ϕ^* は方程式 $\phi^{\tau+1} - \phi^{\tau}\mu(q+1) + \mu q = 0$ の正の重根である。(10)より,

$$D(d\phi/d\theta) = \phi^{\tau}\tau\mu^2q(q+1)\sin\omega\tau \quad (12)$$

よって, $\text{sgn}[d\phi/d\theta] = \text{sgn}[\sin\omega\tau]$ であり, $d\phi/d\theta = 0 \Leftrightarrow \sin\omega\tau = 0$. $\sin\omega\tau = 0$ のとき, $\omega\tau = N\pi$, $\cos\omega\tau = (-1)^N$ ($N=0, 1, \dots, 2\tau-1$). したがって, $\cos(\theta - \omega\tau) = (-1)^N \cos\theta$, $\sin(\theta - \omega\tau) = (-1)^N \sin\theta$. これを (9) に代入すると, $\cos\omega\sin\theta = \cos\theta\sin\omega$, すなわち $\sin(\theta - \omega) = 0$. それゆえ, $d\phi/d\theta = 0$ のとき $\sin\omega\tau = 0$ かつ $\sin(\theta - \omega) = 0$. このとき, $\theta = N\pi/\tau$ で, $\omega = \theta$ または $|\omega - \theta| = \pi$. (i) N が奇数で $\omega = \theta$, (ii) N が奇数で $|\omega - \theta| = \pi$, (iii) N が偶数で $\omega = \theta$, (iv) N が偶数で $|\omega - \theta| = \pi$, の 4 つの場合に対応して, (9) から

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \phi^{\tau+1} - \phi^{\tau}\mu(q+1) - \mu q = 0, & \text{(ii)} \quad & \phi^{\tau+1} + \phi^{\tau}\mu(q+1) + \mu q = 0 \\ \text{(iii)} \quad & \phi^{\tau+1} - \phi^{\tau}\mu(q+1) + \mu q = 0, & \text{(iv)} \quad & \phi^{\tau+1} + \phi^{\tau}\mu(q+1) - \mu q = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

を得る。根の限界に関する定理より, (i) の唯一の正根 $\bar{\phi}$ は $\max_{\theta} \Psi(\theta)$ を表す (高木 1965, p. 105. なお, $\bar{\phi}$ は単根)。 (iii) は明らかに正根を持たない。 (ii) は $\mu < \mu^*$ のときには正根をもたない。 $\mu = \mu^*$ のとき解 $\phi = \phi^*$ を重根にもつが, このとき $D=0$ となり, $d\phi/d\theta$ は確定しない。 $\mu > \mu^*$ のとき, 異なる 2 つの正根

をもつ。(iv)は唯一の正根 $\hat{\psi}$ をもち、これは逆数 $\hat{\psi}^{-1}$ が方程式 $q\mu(\phi^{-1})^{\tau+1} - \mu(q+1)(\phi^{-1})^{\tau} - 1 = 0$ の唯一の正根 $\max_{\theta} \phi^{-1}(\theta)$ であるから、 $\min_{\theta} \phi(\theta)$ を与える。以上をまとめると、(8)は $\theta = (2N-1)\pi/\tau$ で $(\phi, \omega) = (\bar{\psi}, (2N-1)\pi/\tau)$ を解にもち、さらに、 τ が奇数のとき $\theta = (2N-1)\pi/\tau$ で $(\bar{\psi}, (2N-1\pm\tau)\pi/\tau)$ を、偶数のとき $\theta = (2N-2)\pi/\tau$ で $(\bar{\psi}, (2N-2\pm\tau)\pi/\tau)$ を解にもつ ($N=1, 2, \dots, \tau$, 複号は $0 \leq \omega < 2\pi$ となるように選ぶ)⁴⁾。

次に、 θ の変化に伴う ϕ の変化について検討する。 $\theta=0$ のとき、(7)より

$$x^{\tau+1} - (q+1)\mu x^{\tau} + q\mu = 0 \quad (14)$$

これは(13)の(iv)と同係数の方程式であり、 $\tau+1$ 個の根のうち、 $\mu \geq \mu^*$ のときのみ正根が重複を含めて2個、 τ が偶数の時のみ負根が1個 ($-\hat{\psi}$)、他はすべて共役複素根である。 ϕ は全体として θ に対して $2\pi/\tau$ の周期をもつので、考察の範囲を閉区間 $[0, 2\pi/\tau]$ に限定しても一般性を失わない。

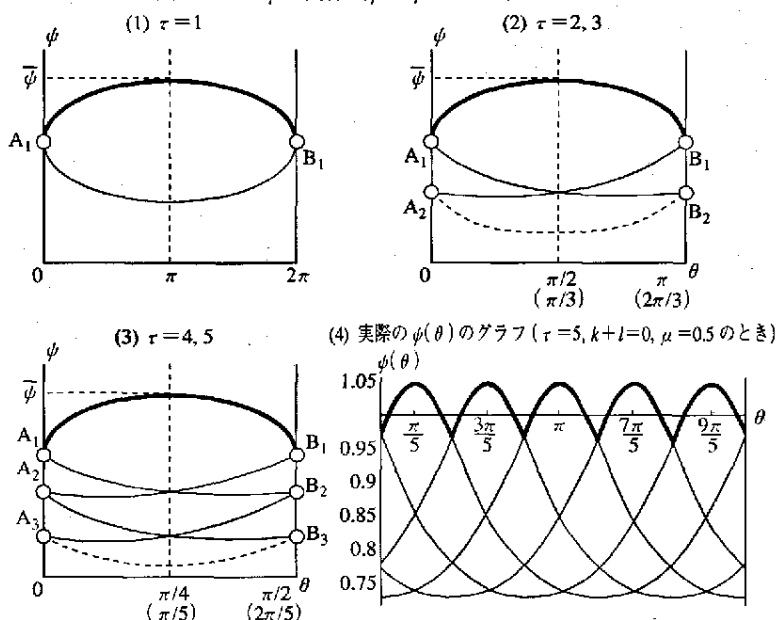
(a) $\mu > \mu^*$ のとき。 $\theta=0$ において ϕ がとる異なる値を大きさの順に ϕ_1, ϕ_2, \dots , とし、 (θ, ϕ) 平面において点 $(0, \phi^N)$ を A_N , $\theta=\pi/\tau$ に関して A_N に対称な点 $(2\pi/\tau, \phi_N)$ を B_N とする。 τ が偶数のときの唯一の実根の絶対値は $\hat{\psi}$ であり、またこれは単根であるから、それ以外の根の絶対値は $\hat{\psi}$ より大きい。したがって ϕ_1 は(14)の共役複素根に対応する。共役複素根の正弦は符号を異にするから、(12)より、 $d\phi/d\theta$ は一方については正、他方については負。したがって θ が増加すると、一方の根の絶対値は増加し、他方の根のそれは減少する。 (θ, ϕ) 平面で A_N から右に上昇する経路を $A_N \uparrow$, 下降する経路を $A_N \downarrow$ で表そう。 A_1, A_2, \dots , を出発点とする最大 $\tau+1$ 個の経路は全体として $\theta = \pi/\tau$ に関して対称であり、 $\theta = \pi/\tau$ で1つの経路が最大値 $\bar{\psi}$ を、 τ が偶数の場合には別な経路が最小値 $\hat{\psi}$ をとる。それ以外では、 $0 < \theta < 2\pi/\tau$ で $d\phi/d\theta \neq 0$ であり、単調増加または単調減少となる。

4) 例えば、 $\tau=5$ ならば、 ϕ の θ に関する最大値、最小値はいずれも $\theta=\pi/5, 3\pi/5, \pi, 7\pi/5, 9\pi/5$ のときに与えられ、 $\tau=6$ ならば最大値は $\theta=\pi/6, \pi/2, 5\pi/6, 7\pi/6, 3\pi/2, 11\pi/6$ のとき、最小値は $\theta=0, \pi/3, 2\pi/3, \pi, 4\pi/3, 5\pi/3$ のときに与えられる。

$A_1 \uparrow$ は $\theta = \pi/\tau$ に関する対称性から, B_1, B_2, \dots , のどれかに到達する。 $0 < \theta < \pi/\tau$ では $d\psi/d\theta = 0 \Rightarrow \theta = \pi/\tau$ であるから, $A_1 \uparrow$ は $\theta = \pi/\tau$ で減少から増大に転じる。 $\theta = \pi/\tau$ に対応する値は $\widehat{\psi}$ ではなく, したがって $\overline{\psi}$ である。
 $\overline{\psi}$ が単根であることから, $A_1 \uparrow$ はこの経路以外になく, それゆえ A_1 (および B_1) はただ1組の共役複素根に対応する。 $(\pi/\tau, \overline{\psi})$ を \overline{C} とし, $A_1 \uparrow$ が単調増加で \overline{C} に至ることを $A_1 \uparrow \overline{C}$ と表そう。もし $A_N, B_N (N \geq 2)$ が存在し, この経路が単調減少に転じてから B_N に至る, すなわち $A_1 \uparrow \overline{C} \downarrow B_N$ となったとすれば, 対称性から, $A_N \uparrow \overline{C} \downarrow B_1$ なる経路も存在するが, これは \overline{C} に至る経路は $A_1 \uparrow$ だけであることに矛盾。したがって, $A_1 \uparrow \overline{C} \downarrow B_1$ でなければならない。
 τ が偶数のとき, $(\widehat{\psi}, 0)$ を A_Z とすると, この点で $d\psi/d\theta = 0$ であるが, $\widehat{\psi}$ は最小値であるから, $d^2\psi/d\theta^2 > 0$ 。したがってすべての $A_N (1 \leq N \leq Z)$ は上方への経路 A_N を持つ。 $A_N \uparrow (2 \leq N \leq Z)$ については, $0 < \theta < 2\pi/\tau$ の全域で単調増加。したがって $A_2 \uparrow B_1$, さらに対称性から $A_1 \downarrow B_2$ である。 $A_1 \downarrow$ は単根に対応しているので, $A_2 \uparrow$ もやはり単根に対応する。よって, もし $A_2 \downarrow$ が存在すれば, A_2, B_2 もただ1組の共役複素根に対応する。以下同様の推論から, 共役複素根の絶対値は重複せず, $Z = \tau/2 + 1$ で, $A_N \downarrow (1 \leq N \leq \tau/2)$ について $A_N \downarrow B_{N+1}$, $A_N \uparrow (2 \leq N \leq \tau/2 + 1)$ について $A_N \uparrow B_{N-1}$ であることが言える。 τ が奇数のとき, $A_{(\tau+1)/2} \downarrow$ は $B_{(\tau+1)/2}$ に至るので, $\theta = \pi/\tau$ で $d\psi/d\theta = 0$ となって $\overline{C}(\pi/\tau, \widehat{\psi})$ を通り, 単調増加に転じる。すなわち, $A_{(\tau+1)/2} \downarrow \overline{C}(\pi/\tau, \widehat{\psi}) \uparrow B_{(\tau+1)/2}$ である (図1-(1)~(3))。

それゆえ, $\Psi(\theta)$ は $(2N-2)\pi/\tau < \theta < (2N-1)\pi/\tau$ で単調増加, $(2N-1)\pi/\tau < \theta < 2N\pi/\tau$ で単調減少となる ($N=1, 2, \dots, \tau$) (図1-(4))。 $\theta = (2N-2)\pi/\tau$ では, $\Psi(\theta)$ は連続ではあるが微分可能ではない。これらは $\Psi(\theta)$ を与える経路が入れ替わる点にあたる。

(b) $\mu \geq \mu^*$ のとき。 $\mu = \mu^*$ ならば(14)は正の重根 ψ^* を解にもつ。 $\theta = (2N-2)\pi/\tau (N=1, 2, \dots, \tau)$ で $D=0$ となるので, $((2N-2)\pi/\tau, \psi^*)$ を通る2つの経路はその点で微分係数をもたない。しかし, 係数に対する根の連続性から,

図1 θ と ϕ の関係 ($\mu < \mu^*$ のとき)

(注) (1)~(3)は各経路の大小関係のみを表している。()内の目盛りは $\tau=3, 5$ の場合に対応し、点線はこれらの場合の最下方の経路である。(1)~(4)で、太線部分が $\phi(\theta)$ の動きを示す。

(θ, ϕ) 平面で $(0, \phi^*)$ から出る経路も一方は上昇し、他方は下降する。したがって $\Psi(\theta)$ を与える根 (および他の根の) 増減について(a)の場合と同様の推論が成り立つ。

(c) $\mu = \mu^*$ ならば、(14) は2つの異なる正根 ϕ_a, ϕ_b をもつ。 $\phi_a > \phi_b$ とすると、 $\phi_a > \phi^* = \tau\mu(q+1)/(\tau+1) > \phi_b$ 。また(12)より $[d\phi/d\theta]_{\theta=0} = 0$ であるが、 $\text{sgn}[d^2\phi/d\theta^2] = \text{sgn}[d(\sin\omega\tau)/d\theta] = \text{sgn}[\tau\cos\omega(d\omega/d\theta)]$ 。一方、(10)より、

$$D(d\omega/d\theta) = (1+\tau)\phi^{2\tau}(\phi - \phi^*\cos(\theta - \omega)) \quad (15)$$

であるから $\theta = \omega = 0$ のとき $[d\omega/d\theta]_{\theta=0} = (1+\tau)\phi^{2\tau}(\phi - \phi^*)$ 。すなわち、 ϕ_a に対しては $\text{sgn}[d^2\phi/d\theta^2] > 0$ 、 ϕ_b に対しては $\text{sgn}[d^2\phi/d\theta^2] < 0$ となる。したがって

て $(0, \phi_a)$ から出る経路は上昇し, $(0, \phi_b)$ から出る経路は下降する。ここで次の補題を利用する。

補題 $\mu \geq \mu^*$ のとき, ϕ_a あるいは ϕ^* は (14) の優根である。

(証明) (8) と (9) で $\theta = 0$ のとき, $\phi \sin \omega(\tau+1) = \mu(q+1) \sin \omega\tau$, $\phi^{\tau+1} \sin \omega = \mu q \sin \omega\tau$, またこれらから, $\phi^{\tau} \mu(q+1) \sin \omega = \mu q \sin \omega(\tau+1)$ 。

$$g(\omega) = \mu(q+1) \sin \omega\tau / \sin \omega(\tau+1),$$

$$h(\omega) = \{q \sin \omega(\tau+1) / (q+1) \sin \omega\}^{1/\tau}$$

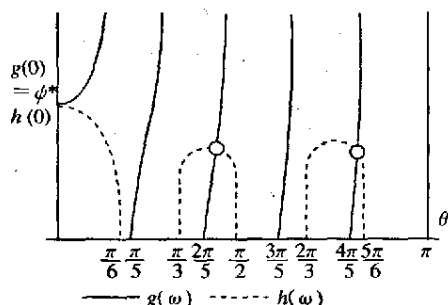
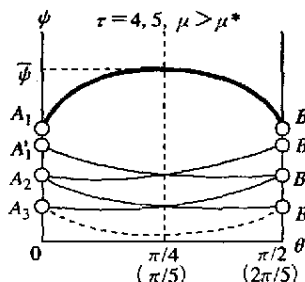
とすると, $g(2N\pi/\tau) = 0$, $h(2N\pi/\tau) = \{q/(q+1)\}^{1/\tau}$ ($N=1, \dots, \tau-1$, ただし $N \neq \tau/2$)。 $N < \tau/2$ のとき, $2N\pi/\tau < (2N+1)\pi/(\tau+1)$ で $g(\omega)$, $h(\omega)$ は連続, ω が左から $(2N+1)\pi/(\tau+1)$ に近づくととき $g(\omega) \rightarrow +\infty$, $h[(2N+1)\pi/(\tau+1)] = 0$ であるから, $g(\omega) = h(\omega)$ を満たす解がこの範囲に少なくとも 1 つある。 $g(\omega)$, $h(\omega)$ は $\omega = \pi$ に関して対称であるから, 方程式 $g(\omega) = h(\omega)$ は $N \leq \tau/2$ に対応して $2N\pi/\tau \leq \omega \leq (2N+1)\pi/(\tau+1)$ で少なくとも合計 $\tau-1$ 個 (τ が奇数のとき) または $\tau-2$ 個 (τ が偶数のとき) の解をもつ。これらは (14) の複素根に対応する。 $\mu \geq \mu^*$ のとき, 実根は ϕ_a , ϕ_b (または重根 ϕ^*) と, τ が偶数のときの $\widehat{\phi}$ である。(14) の根の総数は $\tau+1$ 個であるから, 上記の各区間は解を 1 つずつ含む。 $g(0) = \phi^*$, $h(0) = \{q(\tau+1)/(q+1)\}^{1/\tau}$ より,

$$g(0) - h(0) = \tau(q+1)(\mu - \mu^*)/(\tau+1) \geq 0,$$

$$h(\omega) = \left[\{q/(q+1)\} \sum_{i=1}^{\tau} \cos(\tau+1-i)\omega \cos^{i-1}\omega \right]^{1/\tau} \\ \leq \{q(\tau+1)/(q+1)\}^{1/\tau} = h(0)$$

等号は $\omega = 0$ の場合のみ成立し, $\omega \neq 0$ では, $\phi_a > \phi^* = g(0) \geq h(0) > h(\omega)$ (図 2)。よって (14) で正根以外の根の絶対値は ϕ^* より小さい (補題の証明終わり)。

したがって A_1 は $(0, \phi_a)$ または $(0, \phi^*)$ であり, $\mu < \mu^*$ の場合と同様に, $A_1 \uparrow \bar{C} \downarrow B_1$ となる。共役複素根中で絶対値が最大のものから上昇する経路は $0 < \theta < 2\pi/\tau$ で単調増加であるから, $(2\pi/\tau, \phi_b)$ に至るほかない。ゆえに ϕ_b は共役複素根の絶対値より大きい。 $(0, \phi_b)$ を A'_1 , $\theta = 0$ でそれより小さな ϕ の値に

図2 $h(\omega)$, $g(\omega)$ のグラフ ($\mu > \mu^*$, $\tau=5$ のとき)図3 θ と ϕ の関係 ($\mu > \mu^*$ のとき)

対応する点を(a)の場合と同様に A_2, A_3, \dots , とすると, $\Psi(\theta)$ は経路 $A_1 \uparrow \bar{C} \downarrow B_1$ で与えられ, $\mu \leq \mu^*$ の場合と同じ増減のパターンに従う。証明終わり。 ϕ のグラフは図3のようになる。

$\mu < \mu^*$ ならば $g(0) < h(0)$ 。 $g(\omega)$ は ω が左から $\pi/(\tau+1)$ に近づくとき $+\infty$ に発散, $h[\pi/(\tau+1)] = 0$ より, 方程式 $g(\omega) = h(\omega)$ はさらに $0 < \omega < \pi/(\tau+1)$, $(2\tau+1)\pi/(\tau+1) < \omega < 2\pi$ にも1つずつ根をもつ。これらの根に対応する ϕ は ϕ^* より大きい。なぜなら,

$$g'(\omega) = \sin \omega ((2\tau+1) - \sum_{i=1}^{\tau+1} \cos(\tau+1-i)\omega \cos^{i-1} \omega) / \sin^2(\tau+1)\omega$$

より, $0 < \omega < \pi/(\tau+1)$ で $g'(\omega) > 0$ であるから, この範囲で $g(\omega) > g(0) = \phi^*$ 。したがって, 常に $\Psi(\theta) \geq \phi^*$ が成立する。

2. 投入係数行列固有値の回転に伴う根軌跡

$\mu \geq \mu^*$, $\theta=0$ のとき正根 ϕ_0 が $\Psi(\theta)$ を与えること, および異なる共役複素数の組は異なる絶対値を持つことから, 共役複素根のうち, 扁角で測って実軸に最も近い組とその他の組の絶対値の大小は, μ が μ^* の近傍から離れても逆転しない。よって, $\mu < \mu^*$ の場合には扁角 ω が $0 < \omega < \pi/(\tau+1)$ および $(2\tau+1)\pi/(\tau+1) < \omega < 2\pi$ の範囲にある共役複素根が $\Psi(\theta)$ を与える。このことと前項での考察とから, θ を0から 2π まで回転させたときの(7)の根の軌跡を

複素平面上に描ける。(7)の解を $X_N = (\phi_N(\theta), \omega_N(\theta))$ とする ($N=1, 2, \dots, \tau+1$)。ただし、添字は $\phi_N(\theta), \omega_N(\theta)$ が微分可能となるように選ぶ。このような選び方は $D=0$ となる場合を除いて可能である。

(a) $\mu < \mu^*$ のとき。 $0 < \omega_1(0) < \pi/(\tau+1)$, $(2\tau+1)\pi/(\tau+1) < \omega_{\tau+1}(0) < 2\pi$ とすると, (12) より $\phi'_1(0) > 0$, $\phi'_{\tau+1}(0) < 0$ 。 $\phi_1(0) = \phi_{\tau+1}(0) = \phi_c$, $\omega_1(0) = \omega_c$ とすると, $0 < \theta < \pi/\tau$ で $\phi'_1(\theta) > 0$, $\pi/\tau < \theta < 2\pi/\tau$ で $\phi'_1(\theta) < 0$, $0 \leq \theta \leq 2\pi/\tau$ で $\phi_1(\theta) = \Psi(\theta)$ 。 $X_1(\theta)$ の動きは

$$X_1(0) = (\phi_c, \omega_c) \rightarrow X_1(\pi/\tau) = (\bar{\phi}, \pi/\tau) \rightarrow X_1(2\pi/\tau) = (\phi_c, 2\pi/\tau - \omega_c)$$

となる。 $\phi_1(\theta) > \phi^*$ であるから, (15) よりこの区間で $\omega'_1(\theta) > 0$, すなわち $X_1(\theta)$ は左回転。 θ の $2\pi/\tau$ の回転に伴って (7) の解も $2\pi/\tau$ 回転するので, $X_1(\theta)$ の $0 \leq \theta \leq 2\pi/\tau$ での根軌跡を $(2N-2)\pi/\tau$ 回転した位置に $X_N(\theta)$ ($N=1, \dots, \tau$) の $(2N-2)\pi/\tau \leq \theta \leq 2N\pi/\tau$ での根軌跡があり, $(2N-2)\pi/\tau < \theta < (2N-1)\pi/\tau$ で $\phi'_N(\theta) > 0$, $(2N-1)\pi/\tau < \theta < 2N\pi/\tau$ で $\phi'_N(\theta) < 0$, $(2N-2)\pi/\tau \leq \theta \leq 2N\pi/\tau$ で $\phi_N(\theta) = \Psi(\theta)$, $\omega'_N(\theta) > 0$,

$$X_N((2N-2)\pi/\tau) = (\phi_c, \omega_c + (2N-2)\pi/\tau)$$

$$\rightarrow X_N((2N-1)\pi/\tau) = (\bar{\phi}, (2N-1)\pi/\tau)$$

$$\rightarrow X_N(2N\pi/\tau) = (\phi_c, 2N\pi/\tau - \omega_c)$$

である。これらの $X_1(\theta), \dots, X_N(\theta)$ はそれぞれ $(2N-2)\pi/\tau \leq \theta \leq 2N\pi/\tau$ で優根の軌跡を示す。

$X_{\tau+1}(\theta)$ については, $0 < \theta < \pi$ で $\phi'_{\tau+1}(\theta) < 0$ (よって (15) より $(2\tau-1)\pi/\tau < \omega_{\tau+1}(\theta) < 2\pi$), $\pi < \theta < 2\pi$ で $\phi'_{\tau+1}(\theta) > 0$ (よって $0 < \omega_{\tau+1}(\theta) < \pi/\tau$),

$$X_{\tau+1}(0) = (\phi_c, 2\pi - \omega_c) \rightarrow X_{\tau+1}(\pi) = (\bar{\phi}, 0)$$

$$\rightarrow X_{\tau+1}(2\pi) = (\phi_c, \omega_c) = X_1(0)$$

各軌跡の位置関係を考えると, $X_N(\theta)$ の $0 \leq \theta \leq (2N-2)\pi/\tau$ および $2N\pi/\tau \leq \theta \leq 2\pi$ における軌跡は, それぞれ $X_{\tau+1}(\theta)$ の $2\pi - (2N-2)\pi/\tau \leq \theta \leq 2\pi$ および $0 \leq \theta \leq 2\pi - 2N\pi/\tau$ における軌跡を $2N\pi/\tau$ 回転させたものであることがわかり, $X_1(\theta), X_2(\theta), \dots, X_{\tau+1}(\theta)$ の $0 \leq \theta \leq 2\pi$ における経路が確定する。これらは

全体として τ 個のふくらみをもつ 1 つの閉曲線を描く (図 4-(1)~(3))。

(b) $\mu > \mu^*$ のとき。 $\phi_{\tau+1}(0) = \phi_a$ とすると $(2N-2)\pi/\tau < \omega < (2N-1)\pi/\tau$ で $\phi'_{\tau+1}(\theta) > 0$, $(2N-1)\pi/\tau < \omega < 2N\pi/\tau$ で $\phi'_{\tau+1}(\theta) < 0$ で, $X_{\tau+1}(\theta)$ の動きは

$$X_{\tau+1}(0) = (\phi_a, 0) \rightarrow X_{\tau+1}((2N-1)\pi/\tau) = (\bar{\phi}, (2N-1)\pi/\tau)$$

$$\rightarrow X_{\tau+1}(2N\pi/\tau) = (\phi_a, 2N\pi/\tau) \rightarrow \dots \rightarrow X_{\tau+1}(2\pi) = (\phi_a, 0) = X_{\tau+1}(0)$$

$\omega'_{\tau+1}(\theta) > 0$ より, $X_{\tau+1}(\theta)$ は左回転する 1 つの閉曲線を描き, $\phi_{\tau+1}(\theta) = \Psi(\theta)$ 。 $X_1(\theta)$ については, $\phi_1(0) = \phi_b$ とすると, $0 < \theta < \pi$ では $\phi'_1(\theta) < 0$, $2\pi - \pi/\tau < \omega_1(\theta) < 2\pi$, $\pi < \theta < 2\pi$ では $\phi'_1(\theta) > 0$, $0 < \omega_1(\theta) < \pi/\tau$ 。 $X_1(\theta)$ も 1 つの閉曲線を描き,

$$X_1(0) = (\phi_b, 0) \rightarrow X_1(\pi) = (\bar{\phi}, \pi) \rightarrow X_1(2\pi) = (\phi_b, 0) = X_1(0)$$

を動く。 $X_N(\theta)$ ($N=1, \dots, \tau$) の $0 \leq \theta \leq 2\pi - (2N-2)\pi/\tau$ および $2\pi - (2N-2)\pi/\tau \leq \theta \leq 2\pi$ での軌跡は, それぞれ $X_1(\theta)$ の $(2N-2)\pi/\tau \leq \theta \leq 2\pi$ および $0 \leq \theta \leq (2N-2)\pi/\tau$ での軌跡を $2N\pi/\tau$ 回転させたものである。したがって根軌跡は, 優根に対応する 1 個の閉曲線と, その内部の τ 個の閉曲線とから構成される (図 4-(4))。

(c) $\mu = \mu^*$ のとき。 $X_{\tau+1}(\theta)$ の軌跡が $X_N(\theta)$ と $\theta = (2N-2)/\tau$ ($N=1, \dots, \tau$) で接することを除いては, (b) の場合とまったく同様である。

3. 投入係数行列固有値の絶対値および緩衝在庫係数の作用

命題 2 Ψ は μ および $k+l$ の増加関数である。

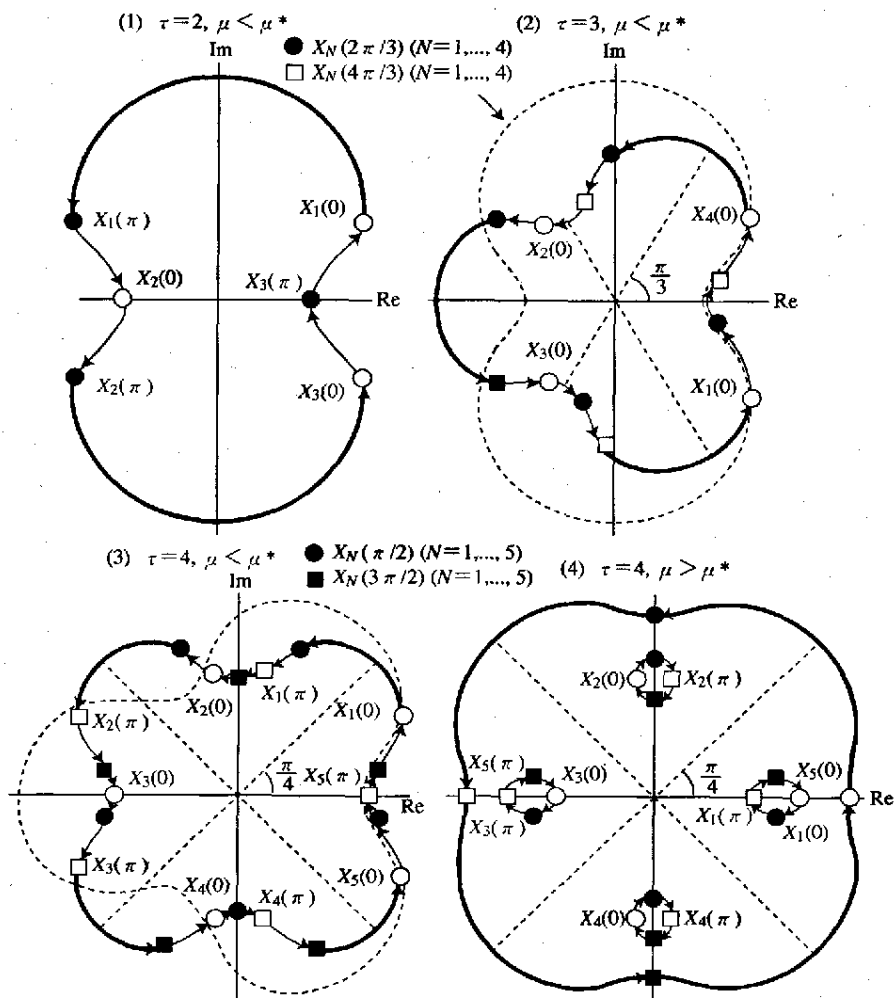
(証明) (9) を μ で微分すると,

$$\mu D(d\phi/d\mu) = (1+\tau)\phi^{2\tau+1}\{\phi - \phi^*\cos(\theta-\omega)\}$$

したがって, $\mu = \mu^*$, $\theta = \omega = 2N\pi/\tau$ の場合を除き $\Psi(\mu) > \phi^*$, $D > 0$ であるから, $d\phi(\mu)/d\mu > 0$ となる。また, (9) を q で微分すると,

$$qD(d\phi/dq) = \phi^{2\tau}[(\tau+1)\{\phi - \phi^*\cos(\theta-\omega)\}\{\phi - \mu\cos(\theta-\omega)\} \\ + \tau\mu^2(q+1)\{1 - \cos^2(\theta-\omega)\}]$$

$\mu = \mu^*$, $\theta = \omega = 2N\pi/\tau$ の場合を除き $\Psi(\mu) > \phi^* = (\tau+3+k+l)\mu/(\tau+1) > \mu$,

図4 θ の回転に伴う (ϕ, ω) の軌跡

(注) (1)~(3)では $\mu=0.5, k+l=0$, (4)では $\mu=0.9, k+l=0$ としている。太線部分が $\phi(\theta)$ を与える根の軌跡を示す。 $\tau=1$ のときは図6-(1)(2)を参照。

$D > 0$ より, $d\Psi(q)/dq > 0$ 。 $\mu = \mu^*$, $\theta = \omega = 2N\pi/\tau$ のとき $\phi = \phi^*$, $D = 0$ であるが, Ψ は μ, q に関して連続であるから, 命題はこの場合を含めて成立する。証明終わり。

4. 安定条件

$\Psi = \Psi(\mu_j, \theta_j)$ と表せば, 命題 1, 2 より $\Psi(\lambda^+, (2N-1)\pi/\tau) \geq \Psi(\mu_j, (2N-1)\pi/\tau) \geq \Psi(\mu_j, \theta_j)$ であるから, $\max_j \Psi(\mu_j, \theta_j) \leq \Psi(\lambda^+, (2N-1)\pi/\tau)$ である。 $\Psi(\lambda^+, (2N-1)\pi/\tau)$ は方程式 $\phi^{k+1} - \phi^* \lambda^+ (q+1) - \lambda^+ q = 0$ の唯一の正根で, 左辺に $\phi = 1$ を代入した値 $1 - \lambda^+ (2q+1)$ が正ならばこれは 1 より小さい。すなわち, 安定性の十分条件は $\lambda^+ (2q+1) < 1$ である。これを $\lambda^+, \tau, k+l$ の不等式で表すと, それぞれ

$$\begin{aligned} \lambda^+ &< \tau/(\tau+2k+2l+6), \tau > 2(k+l+3)\lambda^+/(1-\lambda^+), \\ k+l &< \tau(1-\lambda^+)/2\lambda^+-3 \end{aligned} \quad (16)$$

となる⁵⁾。(16)が同時に安定性の必要十分条件となるのは, 行列 A が「非原始的」(imprimitive)であり $\lambda^+ \exp[i(2N-1)\pi/\tau]$ ($N=1, 2, \dots, \tau$) のいずれかを固有値にもつ場合である。(7)の解は必ず $\phi(\lambda^+, 0)$ を含むから, $\phi(\lambda^+, 0) \geq \phi^*(\lambda^+)$ より, 安定性の 1 つの必要条件として, $\phi^*(\lambda^+) = \tau\lambda^+(1+q)/(1+\tau) = \lambda^+(\tau+3+k+l)/(\tau+1) < 1$, すなわち

$$\begin{aligned} \lambda^+ &< (\tau+1)/(\tau+k+l+3), \tau > \{\lambda^+(3+k+l)-1\}/(1-\lambda^+), \\ k+l &< (\tau+1)/\lambda^+ - (\tau+3) \end{aligned} \quad (17)$$

を得る。(16), (17)が成り立つ範囲は, フロベニウス根 λ^+ および緩衝係数 $k+l$ の減少, 遡及期間 τ の増大に伴って拡大する。

5. 遡及期間の作用

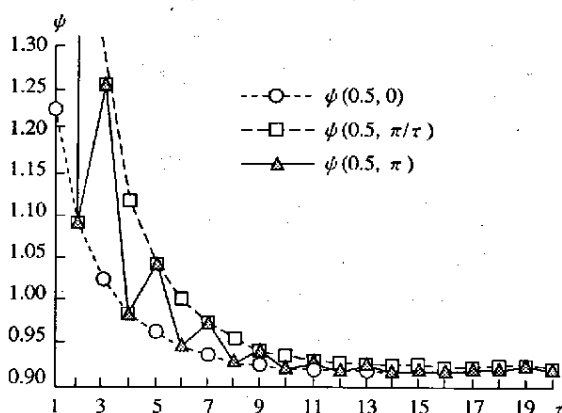
(16)は, 販売予測で遡及期間 τ を十分長くすると調整過程は安定化されるこ

5) 緩衝在庫係数が部門間で異なるとき, 安定性の 1 つの十分条件が $\lambda^+ < \tau/[\tau+2(\max(k_i+l_i)+3)]$ によって与えられる (森岡 1993, p. 64)。

とを示している。しかし、前稿で指摘したように(森岡 1996, pp. 241-244), τ と Ψ の関係はやや複雑である。 $\phi(\lambda^+, (2N-1)\pi/\tau) = \Psi(\tau)$, $\phi^{\tau+1} - \phi^{\tau}\lambda^+(q+1) - \lambda^+q = f(\phi, \tau)$ とすると, $f(\Psi(\tau), \tau) = 0$, $f(\Psi(\tau), \tau+1) = (3+k+l)\lambda^+ (\Psi(\tau)^{\tau+1} + (\tau+1)\Psi(\tau)^{\tau} - \tau)/\tau(\tau+1)$ 。方程式 $\phi^{\tau+1} + (\tau+1)\phi^{\tau} - \tau = 0$ の唯一の正根を ϕ_{τ} とすると, $\Psi(\tau) \geq \phi_{\tau} \Leftrightarrow \Psi(\tau+1) \leq \Psi(\tau)$ 。 $\phi_{\tau} < 1$ であるから, $\Psi(\tau) > 1$ のとき常に $\Psi(\tau+1) < \Psi(\tau)$ 。 ϕ_{τ} は τ の増加関数なので, $\Psi(\tau) > 1$ の状態から出発すると, τ の増加に伴ってはじめ $\Psi(\tau)$ は減少するが, τ が十分に大きくなり, $\Psi(\tau) < \phi_{\tau}$ になると, $\Psi(\tau)$ は増加に転じる (ただし, いったん(16)が成立すれば $\Psi(\tau) > 1$ となることはない)。すなわち τ の増加に伴う $\Psi(\tau)$ の減少には限界が存在する。

(8)より, $\{\Psi(\lambda^+, 0)\}^{\tau+1} > q\lambda^+ = (3+k+l)\lambda^+/\tau$ であるから, $\{(3+k+l)\lambda^+/\tau\}^{1/(\tau+1)}$ は $\max_j \Psi(\mu_j, \theta_j)$ の下限を与える。 $\{(3+k+l)\lambda^+/\tau\}^{1/(\tau+1)}$ は小さな τ に対してはその減少関数だが, τ がある値をこえると増加関数になる。 $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \{(3+k+l)\lambda^+/\tau\}^{1/(\tau+1)} = 1$ であるから $\max_j \Psi(\mu_j, \theta_j)$ は τ の増大に伴って1に漸近する。これは定常値 $d(E-A)^{-1}$ への販売予測 $s^e(t)$ の接近が著しく緩慢になることに対応している。このとき $s(t)$ は $s^e(t)$ とほとんど独立に動き, (5)で $s^e(t) = s^e(t-1)$ とした式 $s(t) = s(t-1)A + d$ で示される安定な調整過程における $s(t)$ の変動に準じて定常値 $d(E-A)^{-1}$ に急速に接近する。

すでに見たように, $\Psi(\tau)$ と θ_j との関係は τ の増大とともに変化する。例えば A が固有値 $-\lambda^+$ をもつとき, $\phi(\lambda^+, \pi, \tau)$ は τ が奇数のとき $\Psi(\tau)$ を与えるが, τ が偶数のとき $\phi(\lambda^+, \pi, \tau) = \phi(\lambda^+, 0, \tau) < \Psi(\tau)$ であるから, $\phi(\lambda^+, \pi, \tau) < 1 < \Psi(\tau)$ かつ $\phi(\lambda^+, \pi, \tau+1) = \Psi(\tau+1) > 1$ となることがある (図5)。したがって, 安定性が $\phi(\lambda^+, \pi, \tau)$ に依存する場合, 平均をとる期間をより長くすることによって, 安定な過程が不安定化されるという「逆行」が生じる可能性が存在する。

図5 $\phi(0.5, 0)$, $\phi(0.5, \pi)$, $\phi(0.5, \pi/\tau)$ のグラフ

III 指数平滑法による販売予測の場合

各企業が販売予測で平滑化定数 $\gamma (0 < \gamma \leq 1)$ を用いる指数平滑法に従うとき、

$$s^e(t) = s^e(t-1) + \gamma(s(t-1) - s^e(t-1)) \quad (18)$$

これを(5)に代入すると、調整過程の安定性は、固有方程式

$$x^2 - x\{(\gamma p + 1)\lambda_j + 1 - \gamma\} + (\gamma p + 1 - \gamma)\lambda_j = 0 \quad (j=1, \dots, n) \quad (19)$$

の重複を含めて $2n$ 個の解の優根に依存する。ここで、 $p=3+k+l$ 。添字の j を省略し、2根をそれぞれ $\alpha(\cos \sigma_\alpha + i \sin \sigma_\alpha)$, $\beta(\cos \sigma_\beta + i \sin \sigma_\beta)$ (ただし $\alpha \geq \beta$)、さらに $(\gamma p + 1)\mu = r$, $1 - \gamma = u$ とおけば、次の方程式を得る。

$$\alpha^2 \exp[2i\sigma_\alpha] - \alpha\{r \exp[i(\sigma_\alpha + \theta)] + u \exp[i\sigma_\alpha]\} + \alpha\beta \exp[i\theta] = 0 \quad (20)$$

β についても同様の式が成立する。 α は θ, μ, p, γ の関数である。

1. 投入係数行列固有値の回転の作用

(20)で θ を $2\pi - \theta$, σ_α を $2\pi - \sigma_\alpha$ に入れ替えると、

$$\alpha^2 \exp[-2i\sigma_\alpha] - \alpha\{r \exp[-i(\sigma_\alpha + \theta)] + u \exp[-i\sigma_\alpha]\}$$

$$+\alpha\beta \exp[-i\theta]=0$$

よって $\alpha(\theta)$ は(したがってまた $\beta(\theta)$ も) $\theta=\pi$ に関して対称である。また複素平面上では、 π に対称な θ の2つの値に対する解は扁角 π について対称な位置にある。

命題 3 (a) $r \neq r^* = (1-\mu)/(p\mu+1)$ ならば、 $\alpha(\theta)$ は $\theta=0$ で最小、 $0 < \theta < \pi$ で単調増加、 $\theta=\pi$ で最大、 $\pi < \theta < 2\pi$ で単調減少となる。(b) $r=r^*$ ならば、 $\alpha(\theta) \equiv \beta(\theta) \equiv \phi^* = \sqrt{(\gamma^*p+1-\gamma^*)\mu} = \sqrt{(\mu p+\mu^2)/(\mu p+1)}$ となる。

(aの証明) $r \neq r^*$ とすると、 $r \neq u$ 。(20)の両辺に $\exp[-i\sigma_a]$ をかけると

$$\begin{aligned}\alpha^2 \cos \sigma_a - \alpha(r \cos \theta + u) + \alpha\beta \cos(\theta - \sigma_a) &= 0, \\ \alpha^2 \sin \sigma_a - \alpha r \sin \theta + \alpha\beta \sin(\theta - \sigma_a) &= 0\end{aligned}\quad (21)$$

$d(\alpha\beta)/d\theta=0$ に注意して(21)を θ で微分すると

$$\begin{aligned}& \begin{bmatrix} 2\alpha \cos \sigma_a - (r \cos \theta + u) & -\alpha^2 \sin \sigma_a + \alpha\beta \sin(\theta - \sigma_a) \\ 2\alpha \sin \sigma_a - r \sin \theta & \alpha^2 \cos \sigma_a - \alpha\beta \cos(\theta - \sigma_a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\alpha/d\theta \\ d\sigma_a/d\theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\alpha r \sin \theta + \alpha\beta \sin(\theta - \sigma_a) \\ \alpha r \cos \theta - \alpha\beta \cos(\theta - \sigma_a) \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (22)$$

左辺の行列の行列式を D とすると、

$$\begin{aligned}D &= \alpha[2\alpha - \{r \cos(\theta - \sigma_a) + u \cos \sigma_a\}]^2 \\ &+ \alpha(r \sin(\theta - \sigma_a) - u \sin \sigma_a)^2 \geq 0\end{aligned}\quad (23)$$

等号は $r \sin(\theta - \sigma_a) - u \sin \sigma_a = 0$ かつ $\alpha = \{r \cos(\theta - \sigma_a) + u \cos \sigma_a\}/2$ の場合のみ成立する。これらを(20)の両辺に $\exp[-2i\sigma_a]$ をかけた式に代入すると、 $\alpha\beta \cos(\theta - 2\sigma_a) - \alpha = 0$ かつ $\alpha\beta \sin(\theta - 2\sigma_a) = 0$ 、すなわち $\theta = 2\sigma_a$ かつ $\alpha = \beta$ 。(21)に代入すると、 $\cos \sigma_a = 1$ 、 $\alpha = \beta = (r+u)/2$ を得る。これは(19)が正の重根をもつ場合である。このとき(19)の判別式 $(r+u)^2 - 4\alpha\beta = 0$ であるから

$$\begin{aligned}r &= r_1 = (1-\mu)/(\sqrt{p\mu}+1)^2, \quad \alpha = \beta = (\sqrt{p\mu}+\mu)/(\sqrt{p\mu}+1) = \phi_1, \text{ または} \\ r &= r_2 = (1-\mu)/(1-\sqrt{p\mu})^2, \quad \alpha = \beta = (\sqrt{p\mu}-\mu)/(\sqrt{p\mu}-1) = \phi_2\end{aligned}\quad (24)$$

ただし、 $r_2 < 1$ となるためには $\mu > 4p/(p+1)^2 \geq 3/4$ (このとき $\phi_2 > 1$)。(24)が成り立つ場合を除いて常に $D > 0$ 。したがって $0 < \theta < 2\pi$ では $d\alpha/d\theta$, $d\sigma_a/d\theta$

は確かに存在する。 $d\beta/d\theta$, $d\sigma_\beta/d\theta$ についても同様である。(22)より,

$$D(d\alpha/d\theta) = \alpha^2(\beta r - \alpha u) \sin \sigma_\alpha \quad (25)$$

(20)より, $\alpha^2 \sin(\sigma_\alpha - \theta) + \alpha u \sin \theta - \alpha \beta \sin \sigma_\alpha = 0$ 。これと(21)から,

$$(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) \sin \sigma_\alpha = (\alpha r - \beta u) \sin \theta \quad (26)$$

したがって, これと(25)から

$$(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) D(d\alpha/d\theta) = \alpha^2(\beta r - \alpha u)(\alpha r - \beta u) \sin \theta \quad (27)$$

$\alpha = \beta$ ならば, (26)より $r = u$ あるいは $\sin \theta = 0$ 。 $\theta = \pi$ のとき(19)は2つの符号を異にする実根を持ち, $r \neq u$ のとき $\alpha(\pi) \neq \beta(\pi)$ 。 $\theta = 0, 2\pi$ のときは, $r_1 \leq r \leq r_2$ である場合のみ $\alpha(0) = \beta(0)$, $\alpha(2\pi) = \beta(2\pi)$ 。したがって $\alpha = \beta$ となるのは, $r = u$ あるいは $r_1 \leq r \leq r_2$ かつ $\theta = 0, 2\pi$ の場合のみ。よって $r \neq u$, $\sin \theta \neq 0$ ならば $\alpha \neq \beta$ 。

$F(\theta) = (\beta r - \alpha u)(\alpha r - \beta u)$ とすると,

$$F(\theta) = (r + u)^2 \alpha \beta - ru(\alpha + \beta)^2 = (r - u)^2 \alpha \beta - ru(\alpha - \beta)^2$$

$0 < r < r_1$, $r_2 < r \leq 1$ のとき $\alpha(0) + \beta(0) = r + u$ より, $F(0) = r^2 p \mu (r + u)^2 > 0$ 。また, $r_1 \leq r \leq r_2$ のとき $\alpha(0) = \beta(0)$ より, $F(0) = \alpha(0)^2 (r - u)^2 > 0$ 。よって $F(0) > 0$ 。さらに, $\{\alpha(\pi) - \beta(\pi)\}^2 = (r - u)^2$ より, $F(\pi) = r^2 p \mu (r - u)^2 > 0$ 。ゆえに $F(\theta) = 0$ のとき $\sin \theta \neq 0$, このとき(19)は必ず複素根をもつので $\sin \sigma_\alpha \neq 0$ 。もし $\alpha r - \beta u = 0$ ならば(26)より $\alpha = \beta$ となるが, このとき $\sin \theta = 0$ あるいは $r = u$ となり矛盾。よって, $\alpha r - \beta u \neq 0$ 。同様にして $\beta r - \alpha u \neq 0$ が言え, 連続性から, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ で $F(\theta) > 0$ が成立。

$D > 0$, $F(\theta) > 0$ より, $\theta \neq 0$ において $\text{sgn}[\alpha'(\theta)] = \text{sgn}[\sin \theta]$ 。すなわち, $0 < \theta < \pi$ で $\alpha'(\theta) > 0$, $\alpha'(\pi) = 0$, $\pi < \theta < 2\pi$ で $\alpha'(\theta) < 0$ 。よって $\alpha(\theta)$ は $\theta = 0$, 2π で最小値を, $\theta = \pi$ で最大値をとる。(27)から $\beta'(\theta)$ は $\alpha'(\theta)$ と逆の符号をもち, それゆえ $\alpha(\theta)$ と $\beta(\theta)$ は互いに逆方向に増減する。 $\alpha(\theta)$ と $\beta(\theta)$ のグラフの概形は図1-(1)と同じである。

(bの証明) $r = r^*$ のとき $r = u$ 。 $r_1 < r^* < r_2$ より, $\theta = 0, 2\pi$ のとき $\alpha(0) = \beta(0)$, $\alpha(2\pi) = \beta(2\pi)$ 。 $\sin \theta \neq 0$ のとき (25) (26)より,

$$(\alpha+\beta)D\alpha'(\theta)=\alpha^2r^2(\beta-\alpha)\sin\theta, (\alpha+\beta)D\beta'(\theta)=\beta^2r^2(\alpha-\beta)\sin\theta \quad (28)$$

よって, $\beta'(\theta)=-\alpha'(\theta)\beta^2/\alpha^2$. 一方, $d(\alpha\beta)/d\theta=0$ より $\beta'(\theta)=-\beta\alpha'(\theta)/\alpha$. したがって $\alpha'(\theta)\beta(\alpha-\beta)=0$. (28) より $\alpha'(\theta)=0$ ならばやはり $\alpha=\beta$. したがって $0\leq\theta\leq 2\pi$ で $\alpha(\theta)\equiv\beta(\theta)\equiv\phi^*=\sqrt{(\mu p+\mu^2)/(\mu p+1)}<1$. すなわち, この場合には(19)の2根の絶対値は θ に無関係に常に1より小さい一定の値をとる. 証明終わり.

2. 投入係数行列固有値の回転に伴う根軌跡

$Y_a(\theta)=(\alpha(\theta), \sigma_a(\theta)), Y_b(\theta)=(\beta(\theta), \sigma_b(\theta))$ とする. (19)は $\theta=\pi$ のとき2つの異符号の実根をもち, 負根および正根に対応する絶対値はそれぞれ

$$\phi^- = \{(r-u) + \sqrt{(r-u)^2 + 4\alpha\beta}\}/2, \\ \phi^+ = \{(-r+u) + \sqrt{(r-u)^2 + 4\alpha\beta}\}/2$$

である. $r\geq r^*$ のとき $\phi^-\equiv\phi^+$. よって, $\alpha(\pi)=\phi^+(0< r\leq r^*)$, $\phi^-(r=r^*)$, $\phi^-(r^*< r\leq 1)$. また, $d\phi^-/d\gamma>0$, $d\phi^+/d\gamma<0$. (19)の $\theta=0$ のときの解は $r_1< r< r_2$ ならば共役複素根で, $\alpha(0)=\beta(0)=\phi_c=\sqrt{(\gamma p+1-\gamma)\mu}$ である. $0< r< r_1$, $r_2< r\leq 1$ ならば2つの異なる正根で,

$$\phi_+ = \{(r+u) + \sqrt{(r+u)^2 - 4\alpha\beta}\}/2, \phi_- = \{(r+u) - \sqrt{(r+u)^2 - 4\alpha\beta}\}/2$$

がそれぞれ $\alpha(0)$ と $\beta(0)$ を表す. よって $\alpha(0)=\alpha(2\pi)=\phi_+(0< r< r_1, r_2< r\leq 1)$, $\phi_1(r=r_1)$, $\phi_2(r=r_2)$, $\phi_c(r_1< r< r^*, r^*< r< r_2)$, $\phi^*(r=r^*)$. また, $0< r< r_1$ で $d\phi_+/d\gamma<0$, $d\phi_-/d\gamma>0$. (20)(21)より, $r\neq r^*$ ならば

$$\cos\sigma_a = (r+u)/(\alpha+\beta) \\ - \{(\alpha+\beta)^2 - (r+u)^2\}(\alpha-\beta)/2(\beta r - \alpha u)(\alpha+\beta) \quad (29)$$

(a) $r_2< r\leq 1$ のとき. $d(\alpha\beta)/d\theta=0$ に注意すると, (29)より, $\cos\sigma_a$ は $0<\theta<\pi$ で θ の減少関数, $\pi<\theta<2\pi$ で増加関数 ($0<\theta<\pi$ で $(\alpha-\beta)/(\alpha+\beta)$ は θ の増加関数, $\beta r - \alpha u$ は減少関数, $r>u$ より $\alpha r - \beta u>0$, $F(\theta)>0$ より $\beta r - \alpha u>0$). (26)より $0<\theta<\pi$ で $\sin\sigma_a>0$, $\pi<\theta<2\pi$ で $\sin\sigma_a<0$, $\sigma_a(\pi)=\pi$

であるから、 $0 < \theta < 2\pi$ で $\sigma'_\alpha(\theta) > 0$ 。また、(29)より、 $\cos \sigma_\beta > 0$ であるから、 $Y_\alpha(\theta)$ は左回転で、 $Y_\beta(\theta)$ は第4象限から第1象限へ、それぞれ

$$Y_\alpha(0) = (\phi_+, 0) \rightarrow Y_\alpha(\pi) = (\phi^-, \pi) \rightarrow Y_\alpha(2\pi) = (\phi_+, 0) = Y_\alpha(0)$$

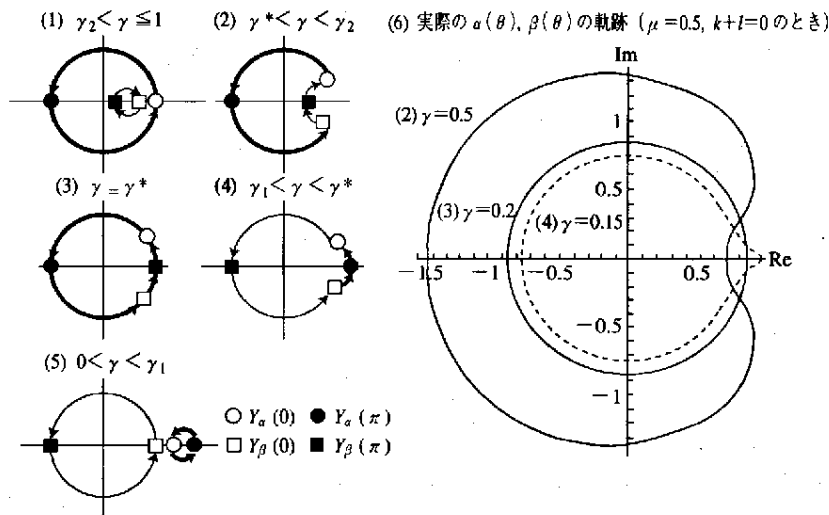
$$Y_\beta(0) = (\phi_-, 0) \rightarrow Y_\beta(\pi) = (\phi^+, \pi) \rightarrow Y_\beta(2\pi) = (\phi_-, 0) = Y_\beta(0)$$

と動く。したがって根軌跡は2つの閉曲線を描く (図6-1))。

(b) $\gamma = \gamma_2$ のとき。 γ が減少して γ_2 に近づくと、 $\phi_+ - \phi_-$ は減少する。 $\gamma = \gamma_2$ のとき $Y_\alpha(0) = Y_\beta(0) = (\phi_2, 0)$ となり、2つの閉曲線は接点をもつ。それ以外では(a)と同様。

(c) $\gamma^* < \gamma < \gamma_2$ のとき。 $\alpha(0) = \beta(0) = \phi_c$ 。 $\sigma_\alpha(0) = \sigma_c$ 、 $\sin \sigma_c > 0$ とすると、 $Y_\alpha(\theta)$ 、 $Y_\beta(\theta)$ の動きは、始点と終点が $Y_\alpha(0) = (\phi_c, \sigma_c) = Y_\beta(2\pi)$ 、 $Y_\beta(0) = (\phi_c, 2\pi - \sigma_c) = Y_\alpha(2\pi)$ となることを除けば、(a)と同様である。根軌跡は全体とし

図6 α 、 β と θ の関係



(注) (1)~(5)の各軌跡はそれぞれの形のうえでの特徴を示しており、太線が優根の動きに対応する。(6)は(3)~(5)の場合について各軌跡間の位置関係を表す。

て虚軸の左側に膨らみをもつ1つの閉曲線をなす(図6-(2))。 r が減少して r^* に近づくとき、根軌跡は円に近づく。

(d) $r=r^*$ のとき。命題3から $\alpha(\theta)=\beta(\theta)=\phi^*=\sqrt{(\mu p+\mu^2)/(\mu p+1)}$ 。(22)で $\alpha=\beta$, $r=u$ を代入すると $\alpha>(r+u)/2=r$ より $D\sigma'_\alpha(\theta)=2\alpha^2(\alpha-r\cos\sigma_\alpha)>0$ 。同様にして $\sigma'_\beta(\theta)>0$ 。 $\theta=0$ で扁角 σ_c ($\sin\sigma_c>0$) をとる方を $Y_\alpha(\theta)$ とすると、 $Y_\alpha(\theta)$, $Y_\beta(\theta)$ はいずれも左回転で、

$$Y_\alpha(0)=(\phi^*, \sigma_c) \rightarrow Y_\alpha(\pi)=(\phi^*, \pi) \rightarrow Y_\alpha(2\pi)=(\phi^*, 2\pi-\sigma_c)=Y_\beta(0),$$

$$Y_\beta(0)=(\phi^*, 2\pi-\sigma_c) \rightarrow Y_\beta(\pi)=(\phi^*, 0) \rightarrow Y_\beta(2\pi)=(\phi^*, \sigma_c)=Y_\alpha(0)$$

となる。 $Y_\alpha(\theta)$, $Y_\beta(\theta)$ の軌跡はあわせて半径 $\phi^*(<1)$ の円を描く(図6-(3))。

(e) $r_1<r<r^*$ のとき。 $\phi^+>\phi^-$ となり、優根を与える経路が入れ替わる。 $r<u$ より、 $\beta r-\alpha u<0$ 。 $F(\theta)>0$ より $\alpha r-\beta u<0$ 。よって(26)より $\sin\sigma_\alpha(0)<0$ 。また、(27)より、 $\cos\sigma_\beta$ は $0<\theta<\pi$ で θ の減少関数、 $\pi<\theta<2\pi$ で θ の増加関数。よって $Y_\beta(\theta)$ は左回転する。(c)(d)の場合とは逆に $\sigma_\beta(0)=\sigma_c$ とすると、(29)より、 $\cos\sigma_\beta>0$ であるから、 $Y_\alpha(\theta)$ は第4象限から第1象限へ、 $Y_\beta(\theta)$ は左回転で、

$$Y_\alpha(0)=(\phi_c, 2\pi-\sigma_c) \rightarrow Y_\beta(\pi)=(\phi^+, 0) \rightarrow Y_\beta(2\pi)=(\phi_c, \sigma_c)=Y_\beta(0)$$

$$Y_\beta(0)=(\phi_c, \sigma_c) \rightarrow Y_\beta(\pi)=(\phi^-, \pi) \rightarrow Y_\alpha(2\pi)=(\phi_c, 2\pi-\sigma_c)=Y_\alpha(0)$$

と動く。したがって根軌跡は全体として虚軸の右側に膨らみをもつ1つの閉曲線をなす(図6-(4))。

(f) $r=r_1$ のとき。 r が r_1 に向かって減少していくとき σ_c は0に近づく。 $r=r_1$ のとき $\sigma_c=0$, $Y_\alpha(0)=Y_\beta(0)=(\phi_1, 0)$ となり、根軌跡は1点で交わる2つの閉曲線に分離する。その他は(e)と同様。

(g) $0<r<r_1$ のとき。始点と終点が $Y_\alpha(0)=Y_\alpha(2\pi)=(\phi_+, 0)$, $Y_\beta(0)=Y_\beta(2\pi)=(\phi_-, 0)$ となること以外では(e)と同様であり、根軌跡は2つの閉曲線を描く(図6-(5))。

3. 投入係数行列固有値の絶対値および緩衝在庫係数の作用

命題 4 α は $r \geq r^*$, すなわち $\mu \geq (1-r)/(p+1)$ において μ の増加関数であり, $r \geq (1-\mu)/(p-2)\mu+1 > r^*$, すなわち $k+l \geq (1-r-\mu)/\gamma\mu-1$ において $k+l$ の増加関数である。

(証明) 前段: $d\phi^*/d\mu > 0$ より, $r=r^*$ のとき成立。(21)を μ で微分すると,

$$\mu D(d\alpha/d\mu) = \alpha^2(\alpha^2 + \beta^2 - (\alpha u + \beta r) \cos \sigma_\alpha) > \alpha^2(\alpha^2 + \beta^2 - (\alpha u + \beta r)) \quad (30)$$

$r > r^*$ ならば, $d(\alpha u + \beta r)/d\mu = \alpha'(\alpha u - \beta r)/\alpha < 0$ より, $\alpha^2 + \beta^2 - (\alpha u + \beta r)$ は $\theta=0$ のとき最小値をとる。この値は $r^* < r < r_2$ のとき $\cos \sigma_c = (r+u)/2\phi_c$ より $2\phi_c^2(1 - \cos \sigma_c) > 0$, $r_2 < r \leq 1$ のとき $\phi_+ + \phi_- = r+u$, $\phi_+ > u$ より, $2\phi_+^2(\phi_+ - u)(\phi_+ - \phi_-) > 0$ といずれも正。よって $d\alpha/d\mu > 0$ 。 $r=r_2$, $\theta=0$ のときには $d\alpha/d\mu$ は存在しないが, α は μ について連続であるから, この場合を含めて α は μ の増加関数となる。

後段: (20) (21) より,

$$(r^2 - u^2) \{ \alpha \cos(\sigma_\alpha - \theta) - \beta \cos \sigma_\alpha \} = (\alpha^2 - \beta^2) (r - u \cos(2\sigma_\alpha - \theta))$$

(22)を p で微分してこれを代入すると,

$$(r^2 - u^2) D(d\alpha/dp) / \alpha \gamma \mu = \alpha(\alpha^2 - \beta^2) \{ r - u \cos(2\sigma_\alpha - \theta) \} + (r^2 - u^2) \{ \beta - \alpha \cos(2\sigma_\alpha - \theta) \} \quad (31)$$

$r > r^*$ ならば $r > u$ 。よって $(r^2 - u^2) \mu D(d\alpha/dp) / \gamma \mu > (r - u) (\alpha - \beta) (\alpha(\alpha + \beta) - (r + u))$ であり, 仮定より $\alpha(\alpha + \beta) - (r + u) \geq 2\alpha\beta - (r + u) = r\{(p-2)\mu+1\} - (1-\mu) > 0$ 。したがって, α は p の (それゆえ $k+l$) の増加関数となる。証明終わり。

$r < r^*$ では必ずしも $d\alpha/d\mu > 0$ は成り立たない。特に $0 < r < r_1$ のとき, $\phi_+ < u$ より $\mu D(d\phi_+/d\mu) = \phi_+^2(\phi_+ - u)(\phi_+ - \phi_-) < 0$ 。すなわち, ϕ_+ は $0 < r < r_1$ で μ の減少関数である。 $d\alpha/dp$ についても, $0 < r < r_1$ のとき $\phi_+ < 1$ より $(r+u) D(d\phi_+/dp) / \gamma \mu = \phi_+(\phi_+^2 - \phi_-^2)(\phi_+ - 1) < 0$ 。すなわち, ϕ_+ は $0 < r < r_1$ で p の減少関数となっている⁶⁾。

4. 安定条件

α を $\alpha(\mu_j, \theta_j)$ と書くと、命題 3, 4 より $\alpha(\lambda^+, \pi) \geq \alpha(\mu_j, \pi) \geq \alpha(\mu_j, \theta_j)$ 。
 $\alpha(\lambda^+, \pi)$ は $\gamma^* < \gamma$ のとき方程式 $x^2 + x\{(\gamma p + 1)\lambda^+ - (1 - \gamma)\} - (\gamma p + 1 - \gamma)\lambda^+ = 0$
 の負根である。したがって、 $\{\gamma(2p - 1) + 2\}\lambda^+ - (1 - \gamma) < 1$ ならば、 $\alpha(\lambda^+, \pi)$
 < 1 。 $\gamma = \gamma^*$ のとき $\alpha(\lambda^+, \pi) = \phi^* < 1$ 。 $0 < \gamma < \gamma^*$ のときは $\alpha(\lambda^+, \pi) = \phi^+ < 1$ 。
 すなわち、 $\{\gamma(2p - 1) + 2\}\lambda^+ - (1 - \gamma) < 1$ は安定性の十分条件である。これを
 $\lambda^+, \gamma, k+l$ についての不等式で表すと、それぞれ

$$\begin{aligned} \lambda^+ &< (2 - \gamma) / \{\gamma(2k + 2l + 5) + 2\}, \quad \gamma < 2(1 - \lambda^+) / \{(2k + 2l + 5)\lambda^+ + 1\}, \\ k + l &< (2 - \gamma - \lambda^+(5\gamma + 2)) / 2\gamma\lambda^+ \end{aligned} \quad (32)$$

となる⁶⁾。(32) が同時に安定性の必要十分条件となるのは、行列 A が「非原始的」でありかつ $-\lambda^+$ を固有値にもつ場合である。(19) は必ず $\alpha(\lambda^+, 0)$ を根にもち、解と係数の関係より $\alpha^2(\lambda^+, 0) \geq (\gamma p + 1 - \gamma)\lambda^+$ 。したがって安定性の 1 つの必要条件が $(\gamma p + 1 - \gamma)\lambda^+ < 1$ 、すなわち、

$$\begin{aligned} \gamma &< (1 - \lambda^+) / (2 + k + l)\lambda^+, \quad \lambda^+ < 1 / \{\gamma(k + l + 2) + 1\}, \\ k + l &< \{1 - \lambda^+(2\gamma + 1)\} / \gamma\lambda^+ \end{aligned} \quad (33)$$

によって与えられる。(32) (33) が成り立つ範囲は、フロベニウス根 λ^+ 、平滑化定数 γ 、緩衝在庫係数 $k+l$ のそれぞれの減少に伴って拡大する。

5. 平滑化定数の効果

販売予測における平滑化定数 γ を適当に小さくすると、調整過程は安定化される。しかし、 γ がごく小さな値になると、販売予測 $s^e(t)$ の変動と販売量 $s(t)$ その他の変数の変動はほとんど分離され、 α は $s^e(t)$ の収束の緩慢さを反映して 1 に接近する。すなわち、 $\alpha(\lambda^+, 0)$ は $\gamma < \gamma_1$ では γ の減少関数であり、 $\lim_{\gamma \rightarrow 0} \alpha(\lambda^+, 0) = 1$ 、 $\alpha(\lambda^+, \pi)$ も $\gamma < \gamma^*$ では γ の減少関数であり、 $\lim_{\gamma \rightarrow 0} \alpha(\lambda^+,$

6) $\gamma = \gamma^*$ のとき $d\phi^*/d\mu > 0$ 。また、 $\gamma > \gamma^*$ のとき $d\phi^+/d\mu > 0$ 。数値計算では、 $\gamma^* \leq \gamma < (1 - \mu) / \{(\mu - 2)\mu + 1\}$ のときにも α は $k+l$ の増加関数となっている。

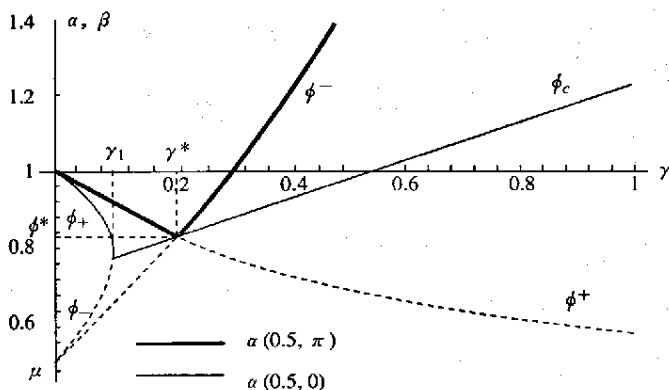
7) 緩衝在庫係数が部門間で異なるとき、安定性の 1 つの十分条件が $\lambda < 1 / [1 + 2\gamma(\max(k_j + l_j) + 3)]$ によって与えられる (森岡 1993, p. 65)。

$\pi=1$ である (図7)。

r^* は2つの特別な意味をもっている。第1に、命題3(b)が示すように、 $r=r^*$ のとき、 α は λ の絶対値 μ のみに依存し、その偏角 θ とは無関係になる。 r^* が1に近い場合には α は θ に著しく感応的であり、また、 r が r^* より小さくなると ϕ_1 は再び θ に感応的になる (ただし、安定性には影響しない)。第2に、 $r=r^*$ のとき、 $\alpha(\lambda^+, \pi) = \max_{\theta} \alpha(\lambda^+, \theta)$ が最小になる。 $r > r^*$ では $\alpha(\lambda^+, \pi) = \phi^-$ で、 ϕ^- は r が減少すると急速に減少する。しかし、 $r < r^*$ になると、 r の減少関数である ϕ^+ が ϕ^- を上回るので、 $\alpha(\lambda^+, \pi)$ はそれ以上減少しえない。

$r=r^*$ のとき $d\alpha/dr > 0$ 、また $r > r^*$ のとき $d\alpha(0)/dr > 0$ 、 $d\alpha(\pi)/dr > 0$ 。もし「 $r \geq r^*$ のとき任意の θ について $dr/d\theta > 0$ 」という命題が成り立てば、移動平均法の場合に見られたような、販売予測における過去の販売実績への加重値の増大が安定な過程を不安定化するという「逆行」は、指数平滑法では発生しえないことになる。移動平均法における「逆行」は、遡及期間 τ が増えると、固有値の回転に伴う Ψ の増減のパターンにずれが生じることに起因していた。

図7 α 、 β と γ の関係 ($\mu=0.5$, $k+l=0$ のとき)



指数平滑法ではこの要因はなく、 $r \geq r^*$ の範囲では「逆行」は生じそうにない。数値計算の結果もこの推論を支持しているが、数学的な証明は課題として残されている。

参考文献

- Foster, E. (1963) "Sales Forecast and the Inventory Cycle", *Econometrica*, 31 (3), pp. 400-421.
- Kornai, J. and B. Martos (1973) "Autonomous Control of the Economic System", *Econometrica*, 41 (3), pp. 509-528.
- _____ (eds.) (1981) *Non-Price Control*, Amsterdam: North Holland.
- Lovell, M. C. (1962) "Buffer Stock, Sales Expectations, and Stability", *Econometrica*, 30 (2), pp. 267-296.
- Martos, B. (1990) *Economic Control Structures*, Amsterdam: North Holland.
- Metzler, L. A. (1941) "The Nature and Stability of Inventory Cycles", *Review of Economic Statistics*, 23, pp. 113-129.
- 塩沢由典 (1983) 「カーン-ケインズ過程の微細構造」『経済学雑誌』84 (3), pp. 48-64.
- 谷口和久 (1991) 「数量調整経済における移行過程について」『経済学雑誌』91 (5-6), pp. 48-64.
- 高木貞治 (1965) 『代数学講義』, 共立出版。
- 森岡真史 (1991-1992a) 「短期調整過程の二類型 (1)-(2)」『経済論叢』148 (4-6), pp. 140-161, 149 (1-3), pp. 79-96.
- _____ (1992 b) 「在庫ストックに基づく自律的制御」『京都大学経済論集』5, pp. 45-59.
- _____ (1993) 「多部門在庫調整過程の安定分析」『立命館国際研究』6 (2), pp. 38-70.
- _____ (1996) 「販売予測と緩衝在庫」『立命館国際研究』8 (4), pp. 238-260.